

# 耦合擺—單擺與扭擺的耦合運動

黃朝暉<sup>a</sup>、朱慶琪<sup>b</sup>

<sup>a</sup> 國立中央大學理學院學士班一年級，桃園縣中壢市

<sup>b</sup> 國立中央大學物理系，桃園縣中壢市

## 摘要

將兩圓片形強力磁鐵以磁力相吸做成擺錘，中間夾一條細線形成單擺。當單擺擺動時，磁鐵與地球磁場水平作用產生扭動現象，與單擺的運動形成耦合效應。本文探討單擺運動與扭擺運動間耦合的情形。

## 設計

此實驗欲探討耦合振盪的現象，耦合振盪又與兩種運動的個別振盪頻率有關。我們今固定強力磁鐵種類及磁場大小（地磁），所以磁鐵扭擺運動的頻率固定。藉由改變單擺擺線長度，則可改變單擺的振盪頻率。來觀察兩者之間的耦合情形。故此教具上裝有收線裝置，可以改變擺長。

## 原理

藉由分析此擺運動[1]，我們可以得到以下方程式：

$$I_t \alpha_\phi = -\mu B_h \sin \phi + \mu B_v \cos \phi \sin \theta \quad (1)$$

$$I_p \alpha_\theta = -mgL \sin \theta + \mu B_v \sin \phi \cos \theta \quad (2)$$

其中 $\phi$ 為地磁水平分量與磁鐵磁矩的夾角、 $\theta$ 為單擺與鉛垂線的夾角、 $I_t$ 為磁鐵的轉動慣量、 $I_p$ 為單擺的轉動慣量、 $L$ 為單擺擺長、 $B_h$ 為地磁水平分量、 $B_v$ 為地磁鉛垂分量、 $m$ 為強力磁鐵質量、 $\alpha_\phi$ 為扭擺的角加速度、 $\alpha_\theta$ 為

單擺的角加速度、 $\mu$ 為磁矩。在 $\phi$ 以及 $\theta$ 為小角度時將(1)、(2)兩式移項化簡後可以得到：

$$\alpha_\phi + a\phi - \alpha b\theta = 0 \quad (3)$$

$$\alpha_\theta + c\theta - b\phi = 0 \quad (4)$$

其中 $a = \omega_\tau^2 = \frac{\mu B_h}{I_t}$ 、 $b = \frac{\mu B_v}{I_p}$ 、 $c = \omega_p^2 = \frac{mgL}{I_p}$ 、

$\alpha = \frac{I_p}{I_t}$ 。將(4)代入(3)消去解得簡正模式頻率

平方如下：

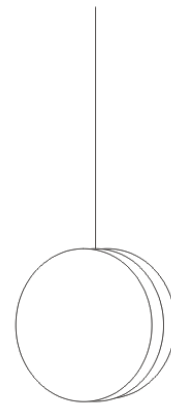
$$\omega_{\pm}^2 = \left[ \frac{a+b}{2} \right] (1 \pm \sqrt{1+e})$$

由以上可知道此單擺在小角度的運動下，扭擺與單擺兩者能量轉移的周期 $T$ 為：

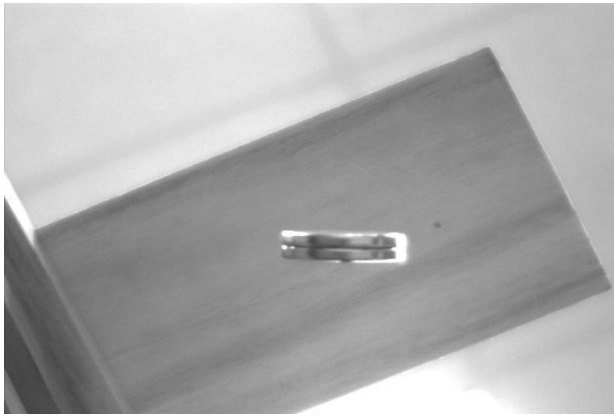
$$T = \frac{2\pi}{\omega_+ - \omega_-}$$

## 實驗裝置

1. 實驗示意圖，將兩圓片形強力磁鐵以磁力相吸做成擺錘，中間夾一條細線形成單擺以。攝影機的位置在磁鐵的正下方。



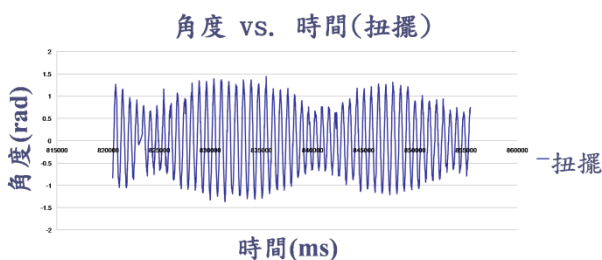
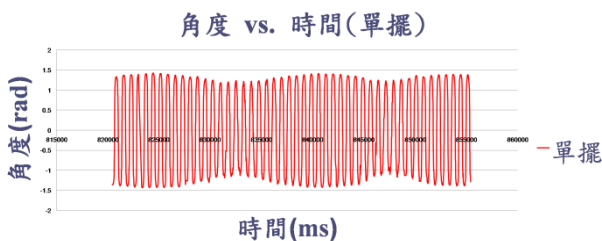
2. 攝影機的視野如下：



## 實驗數據

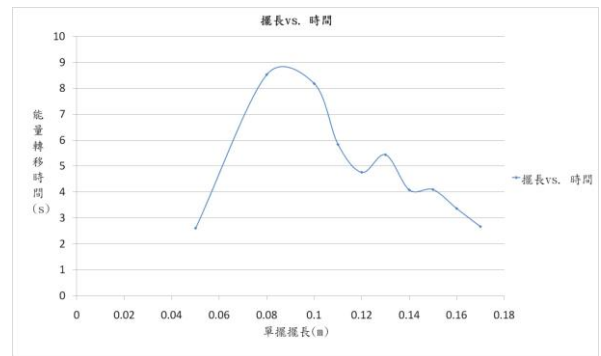
### a. 耦合現象

觀察單擺運動與扭擺運動間的耦合現象，可從單擺擺角與扭擺擺角對時間作圖著手。圖中看出當單擺擺動角度達極小時，扭擺扭動角度達極大，反之亦然。扭擺角度取得方式乃是從攝影機拍攝的連續照片，經 Image J 影像分析軟體，在影像中由幾何方法找出磁鐵的擺角。單擺則是在擺錘底下貼附標記物，再經由以上方法而得。



### b. 擺長與能量轉移周期

藉由改變擺長可以改變單擺的運動週期，然而改變擺長並不會改變扭擺的週期。所以我們可以得到擺長對於單擺與扭擺運動能量轉移周期間的關係。以下為實驗數據圖。



理論上單擺與轉移周期的關係應有一最大值存在，由上圖已可看出。圖中右側多出的小峰研判是實驗誤差導致。未來我們將改進此部分的實驗。

### 參考文獻

- [1] Michael J, Moloney, "Coupled oscillations in suspended magnets," *Am J. Phys.* **76**(2), 125-128 (2008).
- [2] Michael J, Moloney, "Strong Little Magnets," *Phys. Teach.* **45**(9), 352-355 (2007).
- [3] Harris Benson, *University Physics*, (John Wiley & Sons, Inc.), Chap. 29, 30.
- [4] Richard E. Berg and Todd S. Marshall, "Wilberforce pendulum oscillations and normal modes," *Am. J. Phys.* **59**(1), 32-38 (1991).