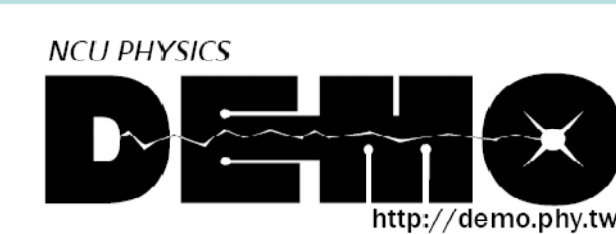
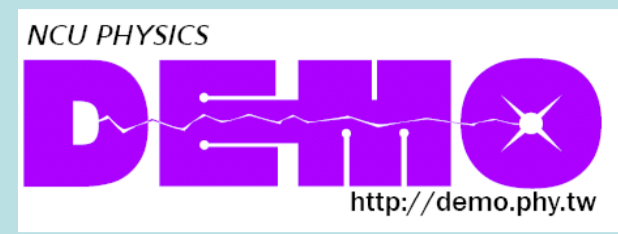


「混沌擺」-混沌現象之演示教具製作

戴伯誠 (P.C. Tai)^a, 朱慶琪 (C. C. Chu)^b

^a中央大學大氣科學學系二年級, rafm0913@gmail.com

^b中央大學物理系 物理演示實驗室, ccchu.ncu@gmail.com



◆簡介:

利用雙擺來演示混沌現象是常見的演示手法。我們改良前人設計製作出此混沌擺，並以實驗方法分析其運動狀態。探討運動過程中的非線性現象。

◆原理介紹:

混沌現象的特徵為系統初始條件的微小差異造成結果截然不同的現象。

◆教具製作:

將兩個雙擺置於相同水平位置，並且選擇透明的材質做為擺架主體。如此一來，便可同時比較兩雙擺運動狀態的差異。雙擺的上擺使用透明壓克力，下擺使用不透明壓克力製作（如右圖）。其優點為：當下擺擺角超過 $\pm 180^\circ$ （旋轉一圈）時，得以容易觀測。

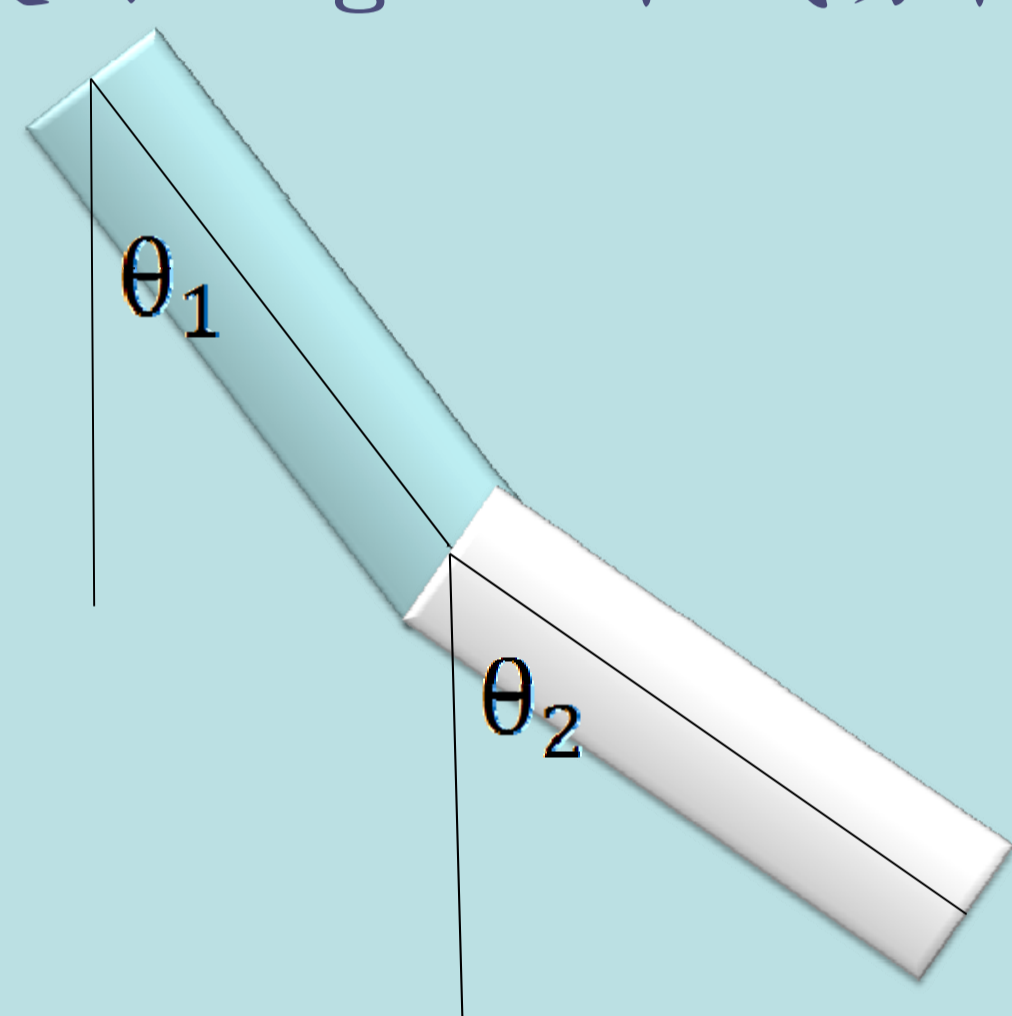


◆實驗:

利用透明主體的方便性，可簡單地測量、比較兩雙擺擺動時，其擺角的相對關係。藉由改變不同的初始條件，將其運動差異呈現出來。

◆實驗方式:

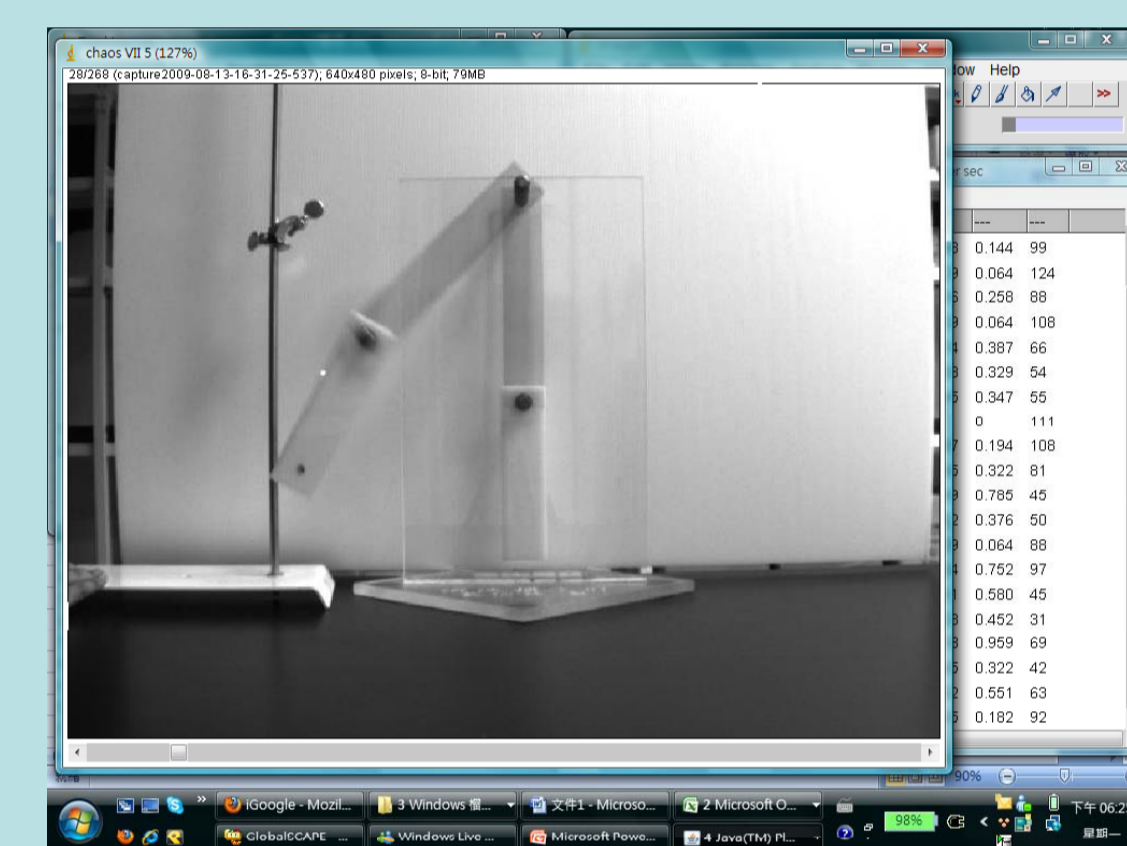
以固定架控制擺動初始角度，用高速攝影機記錄其運動過程，使用Image J 程式分析拍攝出的影像抓取擺片的角度。



定上方擺片與鉛直線夾角為 θ_1 ，下方擺片與鉛直夾角為 θ_2 。
並將鉛直線左邊定為負值、右邊為正值，因此角度的值域為： $-180^\circ \sim 180^\circ$ 。

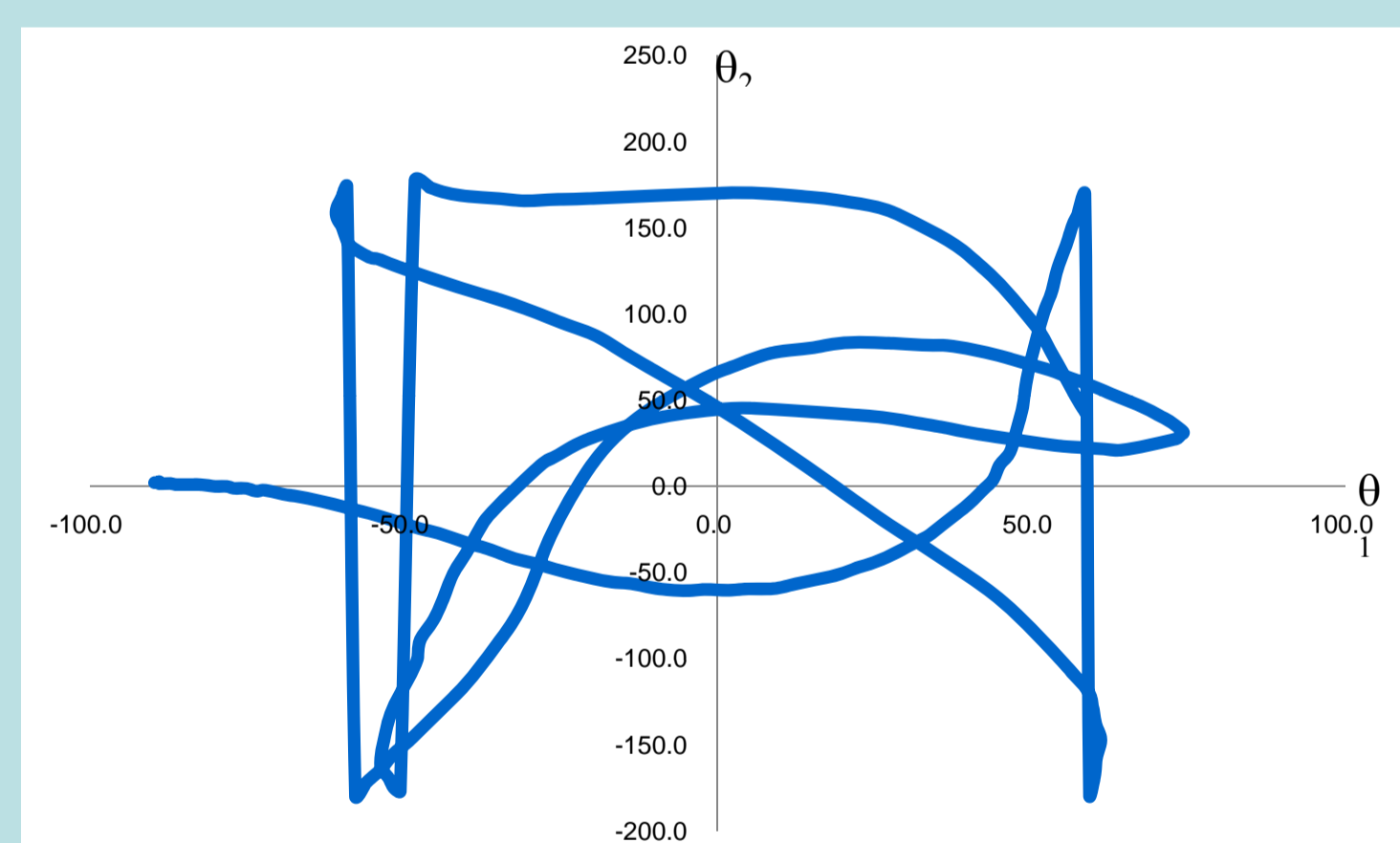


攝影機拍攝出之結果，每秒約可拍攝150張影像。

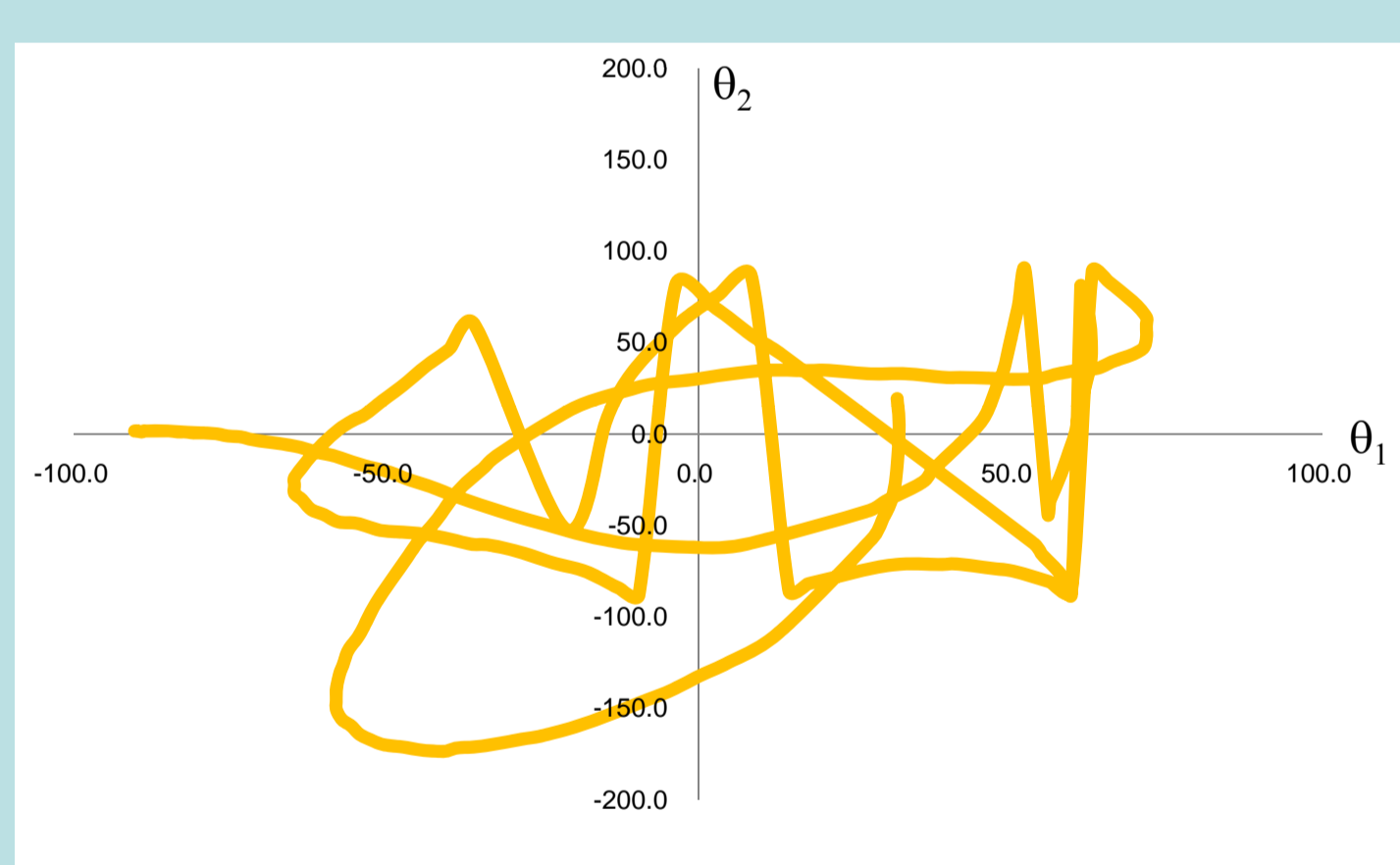


以Image J 處理影像，抓取位置座標以擷取角度。

Part A. 不同實驗初始條件下，第一組釋放角度為 $\theta_1: -90^\circ$ ， $\theta_2: 0^\circ$ ，第二組釋放角度 $\theta_1: -91^\circ$ ， $\theta_2: 0^\circ$ 。分別得到釋放後兩秒內運動過程中的數值後，作圖得以下兩圖形。



圖一



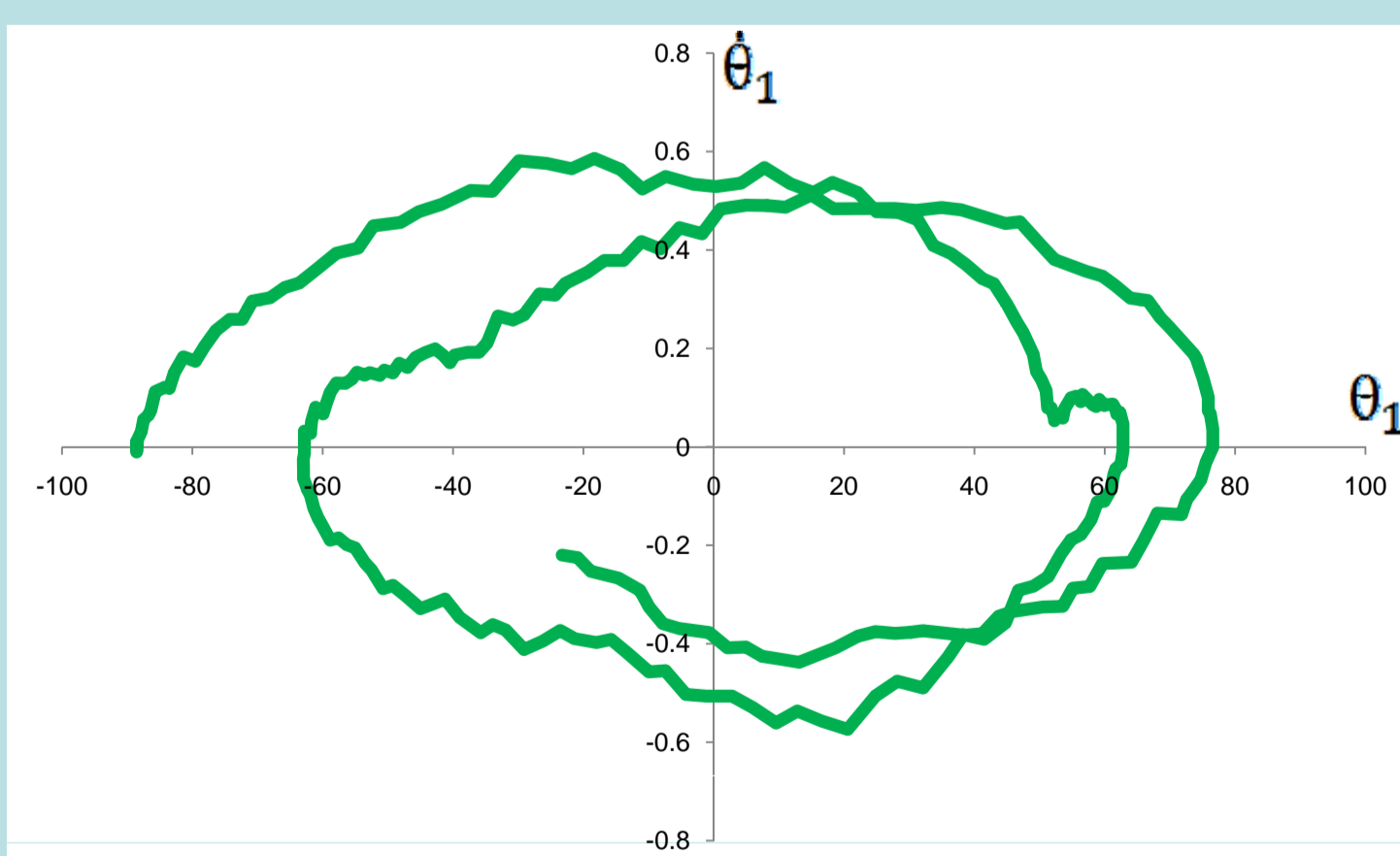
圖二

圖一 初始條件為 $\theta_1: -90^\circ$ ， $\theta_2: 0^\circ$
圖二 初始條件為 $\theta_1: -91^\circ$ ， $\theta_2: 0^\circ$
兩次運動初始條件僅僅只差 1° ，但兩秒內運動變化結果卻截然不同。

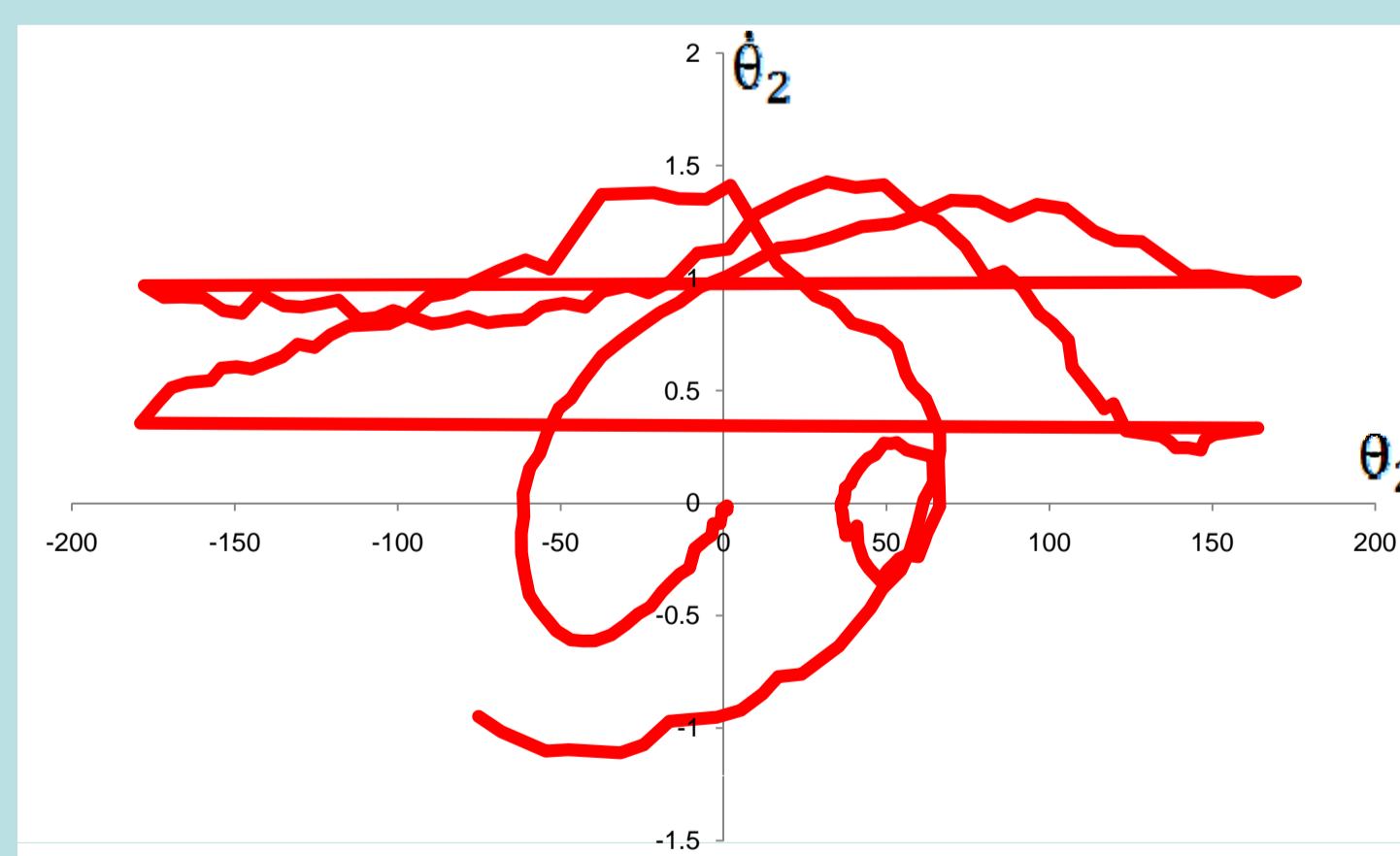
Part B. 控制兩次實驗初始條件相同： $\theta_1: -90^\circ$ ， $\theta_2: 0^\circ$ 。我們測量、繪出運動相圖(phase diagram)，觀察其差異。



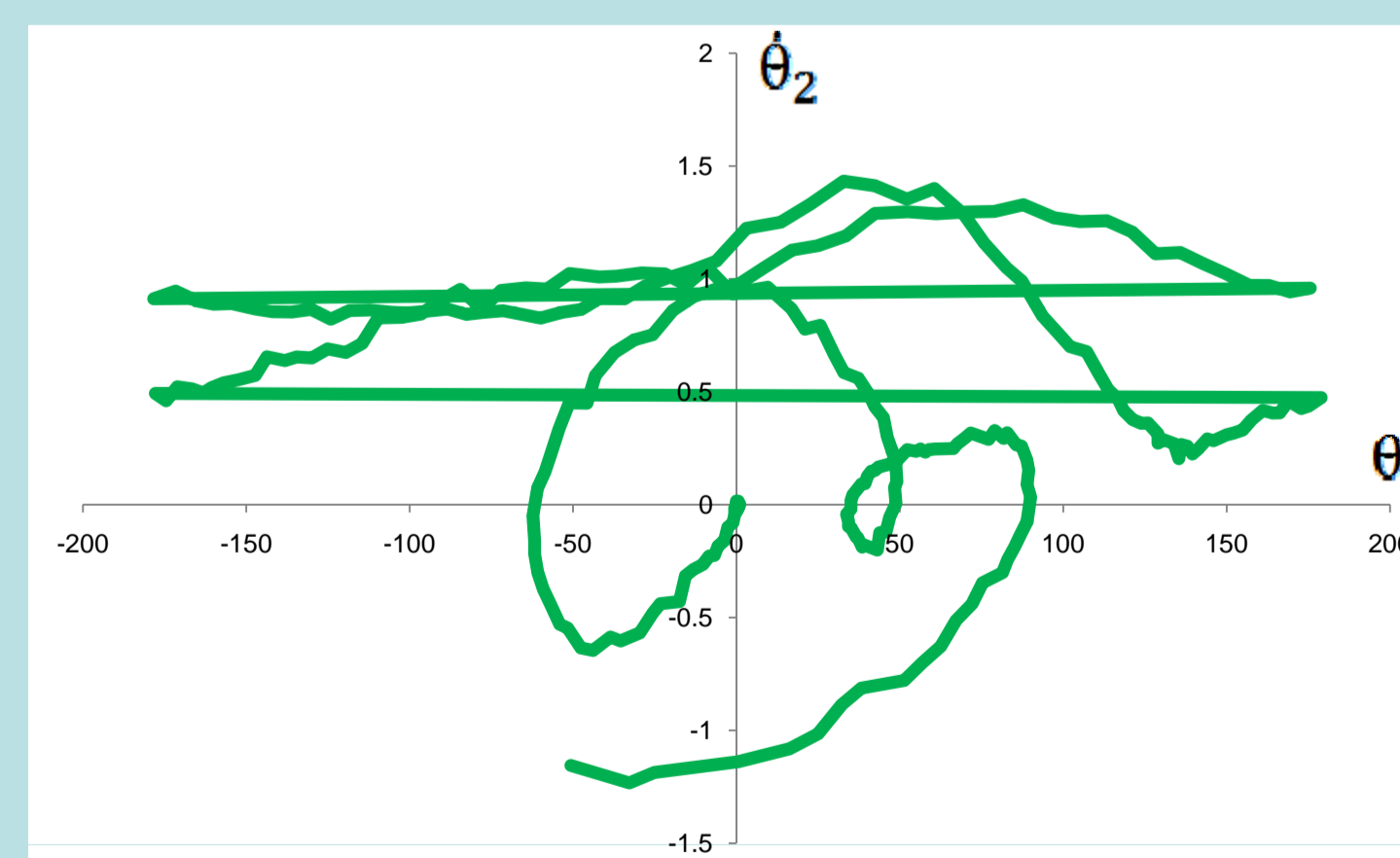
圖三



圖四



圖五



圖六

以上四圖相同顏色表示同一次運動。圖三、圖四為兩次運動中 θ_1 的相圖，而圖五、圖六則為 θ_2 的相圖。雖然從兩次 θ_1 的相圖僅有些許的差異，而 θ_2 的相圖則有明顯差異。未來我們將企圖由相圖中分析此系統的Lyapunov exponent，以深入理解此系統的不穩定性。

◆參考文獻:

- [1] Paul A. Bender, "A fascinating resonant double pendulum," Am. J. Phys. **53** 1114 (1985).
- [2] T. Shinbrot, C. Grebogi, J. Wisdom, J. A. Yorke, "Chaos in a double pendulum," Am. J. Phys. **60** 491-499 (1992).
- [3] A. Cromer, C. Zahopoulos, M. B. Silevitch, "Chaos in the corridor," Phys. Teach. **30** 382-383 (1992)

◆關鍵字:

雙擺(double pendulum)、混沌(chaos)、非線性(nonlinear)、初始條件(initial condition)、複擺(physical pendulum)、利亞普諾夫(Lyapunov exponents)